# Gel'fand-Naimark 定理、セクターとインストルメント

岡村 和弥 (ドレスト光子研究起点)
E-mail: k.okamura.renormalizable@gmail.com

作用素代数の重要定理として、Gel'fand-Naimark 定理がよく知られている：任意の単位的な可換 C*-代数 $\mathcal{A}$ は、あるコンパクトハウスドルフ空間 $S$ 上の複素数値連続関数のなす *-代数と同型

$$\mathcal{A} \cong C(S) \tag{1}$$

である。$S$ は位相空間として $\mathcal{A}$ 上の指標全体 $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ と同型である。$\chi$ が $\mathcal{A}$ 上の指標であるとは以下の条件を満たす $\chi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ のことをいう：
(1) 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ および $A, B \in \mathcal{A}$ に対し，$\chi(aA + bB) = a\chi(A) + b\chi(B)$。
(2) 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し，$\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$。
このとき，(1) 式の同型は各 $A \in \mathcal{A}$ に対し $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ 上の関数 $\hat{A}(\chi) = \chi(A)$, $\chi \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ を与える写像（Gel'fand 変換）$\iota : \mathcal{A} \ni A \mapsto \hat{A} \in C(\mathrm{Spec}(\mathcal{A}))$ で与えられる。更には，$\mathcal{A}$ 上の線型汎関数 $\omega$ と $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ 上の Radon 測度 $\mu$ が一対一対応する（Riesz-Markov-Kakutani の定理）：

$$\omega(A) = \int_{\mathrm{Spec}(\mathcal{A})} \hat{A}(\chi)\, d\mu(\chi), \qquad A \in \mathcal{A}. \tag{2}$$

同様の結果が可分な前双対をもつ可換 von Neumann 代数 $\mathcal{C}$ に対しても成立し，$\mathcal{C}$ は或る局所コンパクトハウスドルフ空間 $\Gamma$ とその上の Radon 測度 $\lambda$ から定義される $L^\infty(\Gamma, \lambda)$ と von Neumann 代数として同型である。これらの結果については多くの作用素代数の教科書に記述がある（例えば [1]）。

上の一連の結果は可換な場合特有の成果であり，一般の非可換の場合にはそのまま成立する定理ではない。可換のときは，状態（規格化された正値線型汎関数のこと）を定めるごとに確率空間が定まることを上の結果は示しており，古典確率論の形式を有界な複素確率変数に対し再現する。

非可換の場合に Gel'fand-Naimark 定理の拡張する方法はいくつかあるが，最も単純な拡張が表現論的な定式化である竹崎および Bichteler の結果である。このアプローチはちょうど局所コンパクト群に関する可換群についての Pontryagin 双対性から最も一般の辰馬双対性への拡張と並行したものになっている。

竹崎および Bichteler の結果も重要であるが，上の確率論的な形式の拡張を非可換においても拡張する際，小嶋 [2] によって導入された「セクター概念」が関係してくる。C*-代数 $\mathcal{X}$ で記述される系におけるセクターはある因子状態 $\omega$ の「準同値類」として定義される。任意の状態 $\omega$ に対して表現 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ および $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ で

$$\omega(X) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(X) \Omega_\omega \rangle, \qquad X \in \mathcal{X} \tag{3}$$

および $\mathcal{H}_\omega = \overline{\pi_\omega(\mathcal{X})\Omega_\omega}$ を満たすものがユニタリー同値を除いて一意に存在する (3 つ組 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$ を $\omega$ の GNS 表現と呼ぶ)。$\mathcal{X}$ 上の 2 つの状態 $\omega_1$ と $\omega_2$ は GNS 表現 $\pi_{\omega_1}$ と $\pi_{\omega_2}$ を通じて定義される状態の集合が一致する，すなわち，$\mathcal{S}_{\pi_{\omega_1}}(\mathcal{X}) = \mathcal{S}_{\pi_{\omega_2}}(\mathcal{X})$ であるとき準同値であるという。ここで，$\mathcal{X}$ の表現 $(\pi, \mathcal{H})$ に対し，$\mathcal{S}(\mathcal{X})$ で $\mathcal{X}$ 上の状態の集合，$\boldsymbol{T}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上のトレースクラス作用素の集合を表すとき，$\mathcal{S}_\pi(\mathcal{X}) = \{\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{X}) \mid \exists \rho \in \boldsymbol{T}(\mathcal{H}) \text{ s.t. } \phi(X) = \mathrm{Tr}[\pi(X)\rho],\ X \in \mathcal{X}\}$ である。一方，ある状態 $\omega$ は，$\pi_\omega(\mathcal{X})$ から生成される von Neumann 代数の中心 $\mathcal{Z}_\omega(\mathcal{X})$ が自明であるとき因子で

あるという。因子状態はマクロな秩序変数の値が確定した純粋相に対応している。このとき，セクターとは秩序変数が確定した状態全体を一括にして扱うことに他ならない。ミクロな系が「所有する」物理量に対し，物理量のなす代数上で定義される状態およびセクターがマクロな「質」の区別・分類を行う役割を果たすのである。因子とは限らない一般の状態 $\omega$ に対しては，$\omega$ を因子状態に積分分解する $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ 上の確率測度 $\mu_\omega$ （$\omega$ の中心測度と呼ばれる）および von Neumann 代数の同型写像 $\kappa_\omega : L^\infty(\mathcal{S}(\mathcal{X}), \mu_\omega) \to \mathcal{Z}_\omega(\mathcal{X})$ が存在して

$$\langle \Omega_\omega | \kappa_\omega(f) \pi_\omega(X) \Omega_\omega \rangle = \int f(\rho)\ \rho(X)\ d\mu_\omega(\rho), \qquad f \in L^\infty(\mathcal{S}(\mathcal{X}), \mu_\omega), X \in \mathcal{X} \tag{4}$$

が成り立つ。すなわち、一般の状態においてもその中心測度を用いることで，その状態を積分分解して得られる因子状態の準同値がセクターを定める。そして，中心の元が異なるセクターを区別する。

量子系においてマクロと聞けば，量子測定理論が頭に浮かぶ人がいると思う。量子測定理論の中心概念は「インストルメント（instrument）」[3] と呼ばれる，測定装置のメーターの出力と対応させて系の確率的重み付き状態変化を記述する写像である。これまではインストルメントは von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ の前双対 $\mathcal{M}_*$ （$\mathcal{M} = (\mathcal{M}_*)^*$ を満たす Banach 空間で、$\mathcal{M}$ が定義される Hilbert 空間上のトレースクラス作用素を用いて定義される $\mathcal{M}$ の上の線型汎関数の集合と一致する）において定義されてきた。インストルメントおよび近年の量子情報理論に関する重要な結果は [4] に依るところが大きい。しかし，量子場などを記述するために必要な一般の von Neumann 代数上で定義されたインストルメントについての解析は [5] でようやく大きな進展を見せた。とはいえ，一般の C*-代数 $\mathcal{X}$ 上で定義するとなると，数学的に適切な一般化や物理的に意味のある状況の指定などが理由で定義および解析方針がなかなか定まらなかった。しかし，その解決のヒントがセクター理論にあったのである。[6] において，$\mathcal{X}$ の双対空間 $\mathcal{X}^*$ の「中心部分空間」を用いて，von Neumann 代数の場合も含むように，懸案の C*-代数上での定義を完成させた。しかも，[6] より更に研究は進展していて，どうやら C*-代数上で定義されたインストルメントを用いれば上の中心測度による状態の積分分解の理論も，インストルメントを通じて正確に測定理論的に解釈できそうなのである。Gel'fand-Naimark 定理などの基本的成果から量子測定理論の中心概念であるインストルメントまで，一貫した理解が可能になる段階もあと一歩のように思う。

## 参考文献


[1] 梅垣壽春，大矢雅則，日合文雄,『作用素代数入門』，(共立出版, 1985).

[2] I. Ojima, Micro-macro duality in quantum physics. In *Stochastic Analysis: Classical And Quantum: Perspectives of White Noise Theory*, (World Scientific, 2005) (pp.143–161).

[3] E.B. Davies and J.T. Lewis, An operational approach to quantum probability, Commun. Math. Phys. **17**, (1970), 239–260.

[4] M. Ozawa, Quantum measuring processes of continuous observables, J. Math. Phys. **25**, (1984), 79–87.

[5] K. Okamura and M. Ozawa, Measurement theory in local quantum physics, J. Math. Phys. **57**, (2016), 015209.

[6] 岡村 和弥, A C*-algebraic approach to quantum measurement, 数理解析研究所講究録 **2123**, (2019).